# Devoir 1 (à rendre le 8 novembre)

Une attention particulière sera portée à la rédaction. Toute affirmation doit être raisonnablement justifiées. Les résultats du cours peuvent être utilisés sans preuve, en indiquant clairement lequel est utilisé.

**Exercice 1.**
Parmi les langages suivants il y a *au moins un* langage algébrique et *au moins un* non-algébrique. Choisissez deux langages tels que un est algébrique et l'autre non et démontrez le (pour montrer qu'un langage est non-algébrique vous utiliserez le lemme de l'étoile pour les langages hors-contexte) :

1. $\{w \in \{a,b\}^*$ tels que $|w|_b = 2|w|_a + 3\}$
2. $\{w\#x \mid w, x \in \{a,b\}^*$ et $w$ est un sous-mot de $x\}$.
3. $\{a^p \mid p$ est premier$\}$.
4. $\{a^{n_0}ba^{n_1}b \cdots a^{n_k}b | k \geq 0$ et $\exists j \geq 0, n_j \neq j\}$

**Exercice 2.**
Soit $\Sigma$ un alphabet fini. Soient $u$ et $v$ deux mots sur $\Sigma^*$. On appelle mélange des mots $u$ et $v$, et l'on note $\mathrm{Mel}(u,v)$ l'ensemble des mots de $\Sigma^*$ défini par :

- † si $u = \varepsilon$, $\mathrm{Mel}(u,v) = \{v\}$
- † si $v = \varepsilon$, $\mathrm{Mel}(u,v) = \{u\}$
- † si $u = xu'$ et $v = yv'$ avec $x, y \in \Sigma$, $\mathrm{Mel}(u,v) = x.\mathrm{Mel}(u',v) \cup y.\mathrm{Mel}(u,v')$.

Si $L$ et $L'$ sont deux langages, on définit $\mathrm{Mel}(L,L') = \bigcup_{u \in L, v \in L'} \mathrm{Mel}(u,v)$.

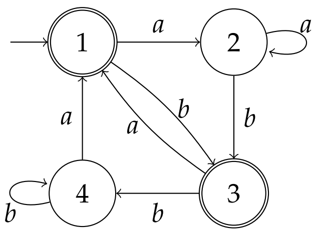
1. On considère les langages $L = (aa)^*$ et $L' = (bbb)^*$. Décrire simplement $\mathrm{Mel}(L,L')$, et montrer qu'il est rationnel.
2. Le mélange de deux langages rationnels est-il toujours rationnel ?
3. On considère $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ et $L' = c^*$. Montrer que $\mathrm{Mel}(L,L')$ est algébrique.
4. Montrer que le mélange d'un langage rationnel et d'un langage algébrique est algébrique.
5. Qu'en est-il du mélange de deux langages algébriques ?

**Exercice 3.**
On s'intéresse aux langages et automates de mots *infinis*. Un mot infini sur l'alphabet $\Sigma$ est une suite dans $\Sigma$, ou une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\Sigma$. On notera par $x^\omega$ une « répétition infinie », de même que $x^*$ désigne une répétition finie arbitraire : ainsi $\Sigma^\omega$ dénote l'ensemble des mots infinis sur $\Sigma$, $a^\omega$ est le mot infini composé uniquement de $a$, et $(aa|bb)^\omega$ est une expression régulière (de mots infinis) représentant les mots dans lesquels les lettres se répètent par paire.
La définition d'un automate $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$ (déterministe ou non) ne change pas. La notion d'exécution est naturelle : une exécution de l'automate $\mathcal{A}$ sur un mot $w = (w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite d'états $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $q_{i+1} \in \delta(q_i, w_i)$. La subtilité est dans la condition d'acceptation : l'exécution $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est acceptante si

1. $q_0 \in I$, et
2. les états acceptants sont visités infiniment souvent, c'est à dire que $\{i \in \mathbb{N} \mid q_i \in F\}$ est infini.

Enfin, le mot $w$ est accepté par $\mathcal{A}$ s'il existe une exécution acceptante de $\mathcal{A}$ sur $w$, et le langage $L(\mathcal{A})$ de l'automate est l'ensemble des mots de $\Sigma^\omega$ acceptés par $\mathcal{A}$.
On travaillera sur l'alphabet $\Sigma = \{a,b\}$.

1. Donner un automate reconnaissant $(b^*a)^\omega$, l'ensemble des mots contenant une infinité de $a$.
2. Décrire simplement le langage de l'automate suivant.




3. Donner un automate non déterministe reconnaissant $\Sigma^* a^\omega$, les mots avec un nombre fini de $b$.
4. Montrer qu'aucun automate déterministe ne reconnait $\Sigma^* a^\omega$.
   En déduire que les langages de mots infinis reconnus par DFA ne sont pas clos par complémentaire, et sont un sous-ensemble strict des langages reconnus par NFA.
   *Indication : considérer $a^{n_0} b a^{n_2} b a^{n_3} b \dots$ pour des $n_i$ appropriés.*
5. Montrer que les langages de mots infinis reconnus par DFA sont clos par union.
6. On considère dans cette question un automate avec deux conditions d'acceptation, c'est à dire un automate $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, I, F_1, F_2)$ avec deux ensembles $F_1, F_2$ d'états finals. Pour qu'une exécution soit acceptante, il faut qu'elle soit acceptante pour $F_1$ et $F_2$ simultanément. Précisément, une exécution avec suite d'états $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est acceptante si $\{n \mid q_n \in F_1\}$ est infini *et* $\{n \mid q_n \in F_2\}$ est infini.
   Transformer $\mathcal{A}$ en un automate normal (avec une seule condition d'acceptation) reconnaissant le même langage. Quand $\mathcal{A}$ est déterministe, la transformation devra donner un DFA.
   *Indication : commencer avec deux copies de $\mathcal{A}$.*
7. En déduire que les langages de mots infinis reconnus par NFA, resp. par DFA, sont clos par intersection.

On peut aussi prouver que les langages reconnus par NFA sont clos par complémentaire, mais cela est plus complexe.