TD 1

Exercice 1. *Échauffement*

Donner des automates finis qui reconnaissent les langages suivants.

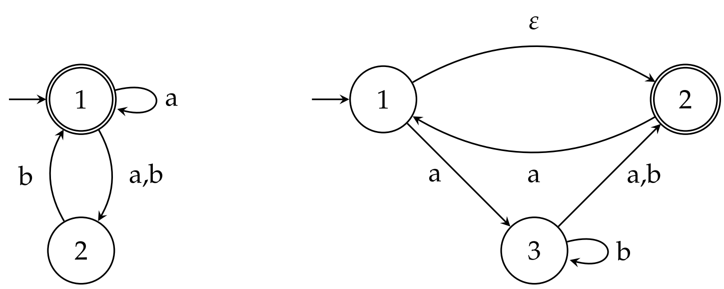
1. $L = \varnothing$
2. $L = \{\varepsilon\}$
3. $L = \{0^n 1^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$
4. $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ se termine par $1\,0\,1\}$
5. $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 \in 2\,\mathbb{N} \wedge |w|_1 \in 2\,\mathbb{N} + 1\}$
6. L est l'ensemble des entiers écrits en base 2 qui sont congrus à 0 modulo 3.
7. On considère $k \in \mathbb{N}$ fixé et L est l'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ dont la k^{ime} lettre en partant de la fin est un a.
8. $L = \{0^{n_1} 1^{m_1} 0^{n_2} 1^{m_2} \ldots 0^{n_k} 1^{m_k} \mid k \geq 0$ et $\forall i,\ 1 \leq i \leq k,\ n_i, m_i > 0\}$
9. $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid$ chaque bloc de trois lettres consécutives contient au moins deux zéros$\}$
10. $L = (00 + 1)^*(11 + 0)^*$
11. Montrer que le langage suivant est rationnel :

$$L = \{a^i \mid \text{Le chiffre 7 apparaît } i \text{ fois consécutives dans le développement de } \pi \text{ en base 10}\}$$

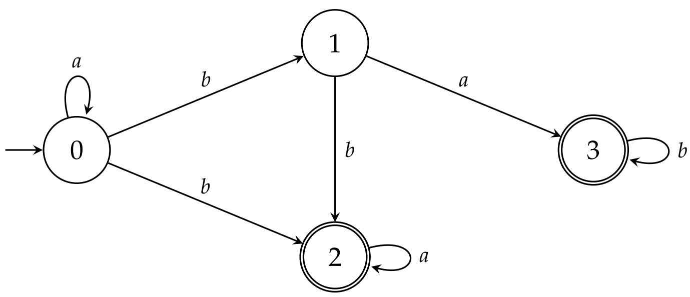
Exercice 2. *Avec détermination*

Déterminiser les automates suivants :

1.



2.



Exercice 3. *À la Presburger !*

1. On définit w^R comme le mot w écrit à l'envers et pour tout langage L, on définit $L^R = \{w^R \mid w \in L\}$. Montrer que si L est rationnel alors L^R est aussi rationnel.

2. Soit

$$\Sigma_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Σ_3 contient toutes les colonnes de taille 3 de 0 et de 1. Une chaîne de symboles de Σ_3 donne ainsi 3 lignes de 0 et de 1. Considérons chaque ligne comme un nombre binaire et posons

$$B = \{w \in \Sigma_3^* \mid \text{ la ligne du bas de } w \text{ est la somme des deux lignes supérieures}\}$$

Par exemple,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in B, \text{ mais } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \notin B$$

Montrer que B est rationnel.

3. Soit

$$\Sigma_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

De même, chaque mot sur Σ_2^* forme deux mots sur $\{0,1\}^*$. Posons,

$$C = \{w \in \Sigma_2^* \mid \text{la ligne du bas de } w \text{ est trois fois la ligne du haut}\}$$

$$D = \{w \in \Sigma_3^* \mid \text{la ligne du haut de } w \text{ est supérieure à la ligne du bas}\}$$

Par exemple,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in C, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in D,$$

$$\text{mais } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \notin C, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin D.$$

Montrer que C et D sont rationnels.

Exercice 4. *Distance de Hamming*

On définit la distance de Hamming $H(x,y)$ entre deux mots x et y comme le nombre de positions qui les distinguent. Par exemple $H(110, 011) = 2$. Si $|x| \neq |y|$, alors leur distance de Hamming est infinie. Si x est un mot et A est un langage sur $\{0,1\}$, la distance de Hamming entre A et x est définie par

$$H(x, A) := \inf_{y \in A} H(x, y)$$

1. Prouver que la distance de Hamming est bien une distance.
2. La distance à une partie est elle toujours atteinte ? Si oui est elle uniquement atteinte ?
3. Calculer le cardinal d'une boule fermée en fonction de son rayon, de son centre et de $|\Sigma|$.
4. Pour un langage $A \subseteq \{0,1\}^*$ et $k \in \mathbb{N}$, on note
$$N_k(L) := \{x \in \Sigma^* \mid H(x, L) \leq k\}$$
Prouver que si L est un langage rationnel alors $N_k(L)$ est rationnel.

Exercice 5. *Minimiser*

Soit L un langage rationnel sur un alphabet fini Σ. On munit Σ d'un ordre total et on considère l'ordre lexicographique $\leq_{\text{lex}}$ sur Σ^*. On définit le langage

$$L_{\text{lex}} = \{w \in L \mid \forall x \in L, |x| = |w| \Rightarrow w \leq_{\text{lex}} x\}$$

c'est-à-dire que pour chaque longueur de mots dans L, on ne garde que le plus petit pour l'ordre lexicographique.

✎ Montrer que L_{lex} est rationnel.