TD 10

Exercice 1.
On fixe un alphabet fini Σ contenant entre autre les lettres a et b. On notera le mot vide «ε». On se donne une bijection entre l'ensemble des machines de Turing sur l'alphabet Σ et Σ^*. On notera $\langle M \rangle$ l'image de la machine de Turing M par cette bijection.

✎ Les ensembles suivants sont-ils décidables ? récursivement énumérables ? de complémentaire récursivement énumérable ?

1. $\{\langle M \rangle \in \Sigma^* \mid M(\langle M \rangle) \text{ s'arrête}\}$
2. $\{\langle M \rangle \in \Sigma^* \mid M(\varepsilon) \text{ s'arrête}\}$
3. $\{\langle M \rangle \in \Sigma^* \mid M(abba) \text{ s'arrête}\}$
4. $L_\varnothing = \{\langle M \rangle \in \Sigma^* \mid L(M) = \varnothing\}$
5. $\{\langle \langle M_1 \rangle , \langle M_2 \rangle \rangle \in \Sigma^* \mid L(M_1) = L(M_2)\}$

Exercice 2.

Théorème (Henry RICE, 1953)**.** *Toute propriété non triviale (c'est-à-dire qui n'est ni toujours vraie ni toujours fausse) sur les langages récursivement énumérables est indécidable.*
Autrement dit, étant donné une propriété P sur les langages récursivement énumérables, le langage $\{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ satisfait } P\}$ est indécidable.

1. Donner des exemples de propriétés non triviales sur les langages récursivement énumérables.
2. Démontrer le théorème de Rice.
3. Existe-t-il une machine de Turing qui décide si la machine donnée en entrée ne s'arrête sur aucune entrée ?

Exercice 3.
On dit que deux machines M et N sont équivalentes si pour toute entrée w, M et N ont le même comportement (s'arrête avec le même ruban, boucle toutes les deux...)
Pour une machine de Turing M, on dit que la *taille* de M est le nombre de symbole de $\langle M \rangle$.
On dit que M est une machine *minimale* si pour toute machine N équivalente à M, la taille de N est plus grande que celle de M.
Soit $MIN_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ est minimal}\}$

1. Montrez que tout énumérateur d'un sous ensemble de MIN_{TM} n'énumere qu'un sous-ensemble fini.
2. Soit $f : \Sigma^* \mapsto \Sigma^*$ une fonction calculable. On supposera que si un mot w n'est pas un vrai code de machine de Turing $\langle M \rangle$, alors il décrit une machine de Turing qui rejette toute entrée immédiatement. Montrez qu'il existe une machine de Turing M telle que M est équivalente à $f(\langle M \rangle)$.
3. Montrez, grâce au théorème de récursion, une preuve alternative du théorème de Rice.

Exercice 4.
Les problèmes suivants sont ils décidables ?

1. Étant donnée une grammaire algébrique G et un langage régulier R, est-ce que $L(G) = R$?
2. Étant donnée une grammaire algébrique G et un langage régulier R, est-ce que $L(G) \subseteq R$?
3. Étant donnée une grammaire algébrique G sur $\{0, 1\}$, est-ce que G génère un mot qui ne contient que des 1 ?
4. Étant donnée une grammaire algébrique G, est-ce que $L(G)$ est régulier ?