TD 11

Exercice 1.
Montrer que les fonctions suivantes sont primitives récursives :

1. L'addition et la multiplication.
2. La fonction *prédécesseur* pred définie par $\mathrm{pred}(n) = \max(0, n-1)$.
3. La fonction *quasi-différence* sub définie par $\mathrm{sub}(n,m) = n - m$ si $n \geq m$ et 0 sinon.
4. La fonction *égalité à* 0 eq0 définie par $\mathrm{eq0}(n) = 1$ si $n = 0$ et 0 sinon.
5. La fonction *égalité* eq définie par $\mathrm{eq}(m,n) = 1$ si $m = n$ et 0 sinon.
6. La fonction *division* div où $\mathrm{div}(m,n)$ est le quotient de la division euclidienne de n par m si $m \neq 0$ et 0 sinon.
7. La fonction *reste* mod où $\mathrm{mod}(n,m)$ est le reste de la division euclidienne de n par m si $m \neq 0$ et 0 sinon.
8. La fonction *puissance* pow où $\mathrm{pow}(n,m) = n^m$.
9. La fonction base où $\mathrm{base}(x,b,i)$ est le ième chiffre de x en base b si $b \geq 2$ et 0 sinon.
10. La fonction $\mathrm{ifThenElse}(b,x,y)$ qui vaut y si b vaut 0 et x sinon.
11. La fonction *racine* où $\mathrm{racine}(n,m)$ est la racine m-ième de n, c'est-à-dire le plus grand entier k tel que $k^m \leq n$ si $n \neq 0$ et 0 sinon.
12. La fonction *logarithme* log où $\log(n,m)$ est le logarithme en base m de n, c'est-à-dire le plus petit entier k tel que $m^k \leq n$ si $m \neq 0$ et 0 sinon.
13. La fonction *estPremier* premier où $\mathrm{premier}(p) = 1$ si p est premier et 0 sinon.

    Indication. *On pourra définir une ou des fonctions intermédiaires.*

Exercice 2.
On définit la fonction d'Ackermann par

$$A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (m,n) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} n+1 & \text{si } m = 0 \\ A(m-1,1) & \text{si } m > 0 \text{ et } n = 0 \\ A(m-1, A(m, n-1)) & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $A(0,n)$, $A(1,n)$, $A(2,n)$ et $A(3,n)$.
2. Montrer que A est bien définie. Est-elle récursive ?
3. Montrer que A est strictement croissante en ses deux arguments. C'est-à-dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $A(n,\cdot)$ et $A(\cdot,n)$ sont strictement croissantes.
4. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note sum_k l'application de $\mathbb{N}^k$ dans $\mathbb{N}$ qui renvoie la somme de ses arguments. Montrer que sum_k est primitive récursive.
5. Soient $k, m \in \mathbb{N}$. Pour toute fonction primitive récursive $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^m$ on note $\mathscr{P}(f)$ la propriété
$$\exists c \in \mathbb{N} \quad \forall n_1, \cdots, n_k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{sum}_m \circ f(n_1, \cdots, n_k) \leq A(c, \mathrm{sum}_k(n_1, \cdots, n_k))$$
Montrer que $\mathscr{P}$ est vraie pour toutes les fonctions primitives récursives de base.
6. Montrer que, pour toutes fonctions primitives récursives f et g, si $\mathscr{P}(f)$ et $\mathscr{P}(g)$ sont vraies, alors $\mathscr{P}(f \circ g)$ est vraie [1] et $\mathscr{P}((f,g))$ est vraie [2].

1. Dès lors que la composition a un sens.
2. Si $f : \mathbb{N}^i \to \mathbb{N}^k$ et $g : \mathbb{N}^j \to \mathbb{N}^\ell$, alors (f,g) est la fonction
$$(f,g) : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^{i+j} & \to & \mathbb{N}^{k+\ell} \\ (n_1, \cdots, n_{i+j}) & \mapsto & (f(n_1), \cdots, f(n_i), g(n_{i+1}), \cdots, g(n_{i+j})) \end{array} \right.$$
où l'image est vue comme un $(k+\ell)$-uplet...

7. Pour $i, j \in \mathbb{N}^*$, $z : \mathbb{N}^i \to \mathbb{N}^j$ primitives récursives et $r : \mathbb{N}^{i+j+1} \to \mathbb{N}^j$ primitive récursive, on pose

$$\mathrm{rec}(z,r) : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^{i+1} & \to & \mathbb{N}^j \\ (m, n_1, \cdots, n_i) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} z(n_1, \cdots, n_i) & \text{si } m = 0 \\ r(m-1, n_1, \cdots, n_i, \mathrm{rec}(z,r)(m-1, n_1, \cdots, n_i)) & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Montrer que si $\mathscr{P}(z)$ et $\mathscr{P}(r)$ sont vraies, alors il existe $c \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n_1, \cdots, n_{i+1} \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathrm{sum}_{i+1}(n_1, \cdots, n_{i+1}) + \mathrm{sum}_j \circ \mathrm{rec}(z,r)(n_1, \cdots, n_{i+1}) \leq A(c, \mathrm{sum}_{i+1}(n_1, \cdots, n_{i+1}))$$

8. En déduire que $\mathscr{P}$ est vraie pour toute fonction primitive récursive.

9. Montrer que la fonction $n \mapsto A(n,n)$ n'est pas primitive récursive. En déduire que la fonction d'Ackermann ne l'est pas non plus.

Exercice 3.
On dit que $A \subseteq \mathbb{N}$ est un *ensemble récursif primitif* si sa fonction caractéristique est récursive primitive, c'est-à-dire si la fonction $\chi_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est récursive primitive, où χ_A est définie par $\chi_A(n) = 1$ si $n \in A$, et 0 sinon. On dit qu'un prédicat (logique) P d'arité p est un *prédicat récursif primitif* si l'ensemble des p-uplets vérifiant P est récursif primitif (on identifie alors P à ce sous-ensemble de $\mathbb{N}^p$).

1. Montrer que tout ensemble fini est récursif primitif. Montrer que pour k fixé, le prédicat P_k défini par « être un multiple de k », est récursif primitif.

2. *Clôture par opérations booléennes :* montrer que les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$ et A^C sont récursifs primitifs si A et B le sont.

3. *Clôture par schéma de définition par cas :* montrer que si les ensembles disjoints $A_1, \ldots A_k$ sont récursifs primitifs et si les fonctions $f_1, \ldots f_k, f$ sont récursives primitives, alors la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in A_1 \\ \ldots & \\ f_k(x) & \text{si } x \in A_k \\ f(x) & \text{sinon} \end{cases}, \quad \text{est récursive primitive.}$$

4. Montrer qu'il existe un codage bijectif $\alpha_2 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, ainsi que les fonctions de décodage associées β_1 et β_2, qui sont récursives primitives.

5. Montrer qu'il existe un codage bijectif des suites finies d'entiers dans les entiers $\mathbb{N}^* \simeq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^i \to \mathbb{N}$.

Exercice 4.
On introduit une variante bornée du schéma de minimisation μ. Si g est une fonction partielle à $p+1$ arguments, on définit la fonction μ_g^B avec $p+1$ arguments. Pour $y, x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{N}$, soit $z \in \mathbb{N}$ minimal tel que $g(z, x_1, \ldots, x_p)$ soit nul ou non-défini. Alors

$$\mu_g^B(y, x_1, \ldots, x_p) = \begin{cases} z & \text{si } z < y \text{ et } f(z, x_1, \ldots, x_p) = 0 \\ \perp & \text{si } z < y \text{ et } f(z, x_1, \ldots, x_p) = \perp \\ y & \text{sinon } (z \geq y \text{ ou } z \text{ n'existe pas}) \end{cases}$$

Autrement dit, on cherche z minimal tel que $f(z, x_1, \ldots, x_p) = 0$ mais seulement pour $z < y$.

1. Montrer que si g est récursive, alors μ_g^B aussi.

2. Montrer que si g est récursive primitive, alors μ_g^B aussi.