TD 3

Exercice 1.
Donner des automates finis reconnaissant les langages définis par les expressions rationnelles suivantes.

1. a^*b^*
2. $(a \cup b)aab(a \cup b)^*$
3. $(b \cup \varepsilon)((a \cup ab)^* \cup (bb)^*)^*$

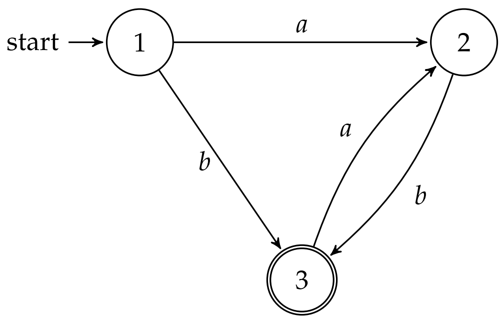
Théorème (Lemme de l'étoile fort). *Pour tout langage rationnel L, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $w \in L$ et pour toute factorisation $w = u\,w'\,v$ avec $|w'| \geq N$, il existe une factorisation $w' = x\,y\,z$ vérifiant*

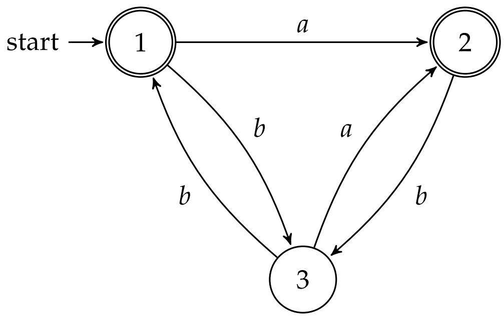
1. $y \neq \varepsilon$
2. $|y| \leq N$
3. $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u\,x\,y^n\,z\,v \in L$

Exercice 2.
Parmi les langages suivants lesquels sont rationnels ? Justifiez vos réponses.

1. $\{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
2. $\{a^m\,b^n\,a^{m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$
3. $\{a^p \mid p$ est premier$\}$
4. L'ensemble des mots qui ont un nombre égal de a et de b.
5. $\{w \cdot \overline{w} \mid w \in \Sigma^*\}$ où le mot $\overline{w}$ désigne le miroir de w c'est-à-dire que si $w = w_1 \dots w_n$, alors $\overline{w} = w_n \dots w_1$.
6. $\{u \cdot \overline{u} \cdot v \mid u, v \in \{a,b\}^+\}$
7. $\{a^i\,b^j \mid\ i, j \in \mathbb{N} \wedge \mathrm{pgcd}(i,j) = 1\}$
8. $\{a^i\,b^j \mid i, j \in \mathbb{N} \wedge i \geq j\}$
9. $\{a^n\,b\,a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Exercice 3.
Donner une expression rationnelle pour les langages reconnus par les automates ci-dessous. On pourra utiliser l'algorithme vu en cours.





Exercice 4.

✎ Montrer que pour tout $k > 1$, il existe un langage reconnu par un DFA à k états, mais par aucun NFA avec moins de $k-1$ états.

Exercice 5.
Soit $L \subseteq \{a,b\}^*$ un langage. On définit le carré de L par $L^2 = \{u \cdot u \mid u \in L\}$.

1. A-t-on nécessairement (L rationnel $\Rightarrow L^2$ rationnel) ?
2. A-t-on nécessairement (L^2 rationnel $\Rightarrow L$ rationnel) ?
3. Que deviennent ces implications pour un langage à une lettre ?

Exercice 6. *Réciproque du lemme de l'étoile*

Théorème (Lemme de l'étoile faible). *Pour tout langage rationnel L, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $w \in L$, si $|w| \geq N$ alors w admet une factorisation en $w = x\,y\,z$ vérifiant*

- † $y \neq \varepsilon$
- † $|y| \leq N$
- † $\forall n \in \mathbb{N} \qquad x\,y^n\,z \in L$

Théorème (Lemme de l'étoile fort). *Pour tout langage rationnel L, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $w \in L$ et pour toute factorisation $w = u\,w'\,v$ avec $|w'| \geq N$, il existe une factorisation $w' = x\,y\,z$ vérifiant*

1. $y \neq \varepsilon$
2. $|y| \leq N$
3. $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u\,x\,y^n\,z\,v \in L$

Remarque. Dans la version forte, on a le choix de la séquence de taille au moins N dans laquelle on pompe !

Dans cet exercice, on considère l'alphabet $\Sigma = \{a,b\}$.

1. On pose $$L = \{a^n\,b^n \mid n \in \mathbb{N}\} + \Sigma^*\,b\,a\,\Sigma^*$$
   - **a.** Montrer que L n'est pas rationel.
   - **b.** Montrer que L vérifie la conclusion du lemme de l'étoile faible. Autrement dit, montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que tout mot $w \in L$ de longueur $|w| \geq N$ se factorise en $w = x\,y\,z$ avec $y \neq \varepsilon$, $|y| \leq N$ et tel que $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x\,y^n\,z \in L$$
   - **c.** Le langage L vérifie-t-il la conclusion du lemme de l'étoile fort ?
2. On pose $$L = \{u\,u^R\,v \mid u,v \in \Sigma^* - \{\varepsilon\}\}$$
   où u^R désigne le miroir de u c'est-à-dire que si $u = u_1\,u_2 \cdots u_n$, alors $u^R = u_n\,u_{n-1} \cdots u_1$.
   - **a.** Montrer que L vérifie le lemme de l'étoile faible pour la borne $N = 4$.
   - **b.** Montrer que L n'est pas rationnel.
3. On considère l'alphabet $\Sigma = \{0,1,2\}$. On définit
   $$L_1 = \{10(2^+0)^{i_1} \cdots 10(2^+0)^{i_k}1 \mid k \in \mathbb{N}^* \wedge 0 < i_1 < \cdots < i_k\}$$
   et $$L_2 = \Sigma^*\,00\,\Sigma^*$$
   - **a.** Montrer que $L = L_1 + L_2$ vérifie le lemme de l'étoile fort avec $N = 4$.
   - **b.** Montrer que L n'est pas rationnel.
4. En déduire qu'il faut se méfier du lemme de l'étoile.