TD 4

Exercice 1. *Résiduels*

Pour chacun des langages suivant, donner le nombre d'états de l'automate minimal de L si L est régulier et sinon, exhiber un nombre infini de résiduels.

1. $L_1 = \{0^n 1^m \mid n, m \geq 0\}$
2. $L_2 = \{w\, w^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$
3. $L_3 = \{x \in \{0,1\}^* \mid |x|_0 \in 2\mathbb{N} \wedge |x|_1 \in 2\mathbb{N}+1\}$
4. $L_4 = \{\omega \in \{0,1\}^* \mid$ chaque bloc de trois lettres consécutives contient au moins deux zéros$\}$
5. $L_5 = \{x \in \{0,1\}^* \mid |x|_0 = |x|_1\}$
6. L_6 est l'ensemble des mots sur $\{a,b\}$ dont la $i^{ième}$ lettre en partant de la fin est un a.
7. $L_7 = \Sigma^* \setminus \{w\, w \mid w \in \Sigma^*\}$

Exercice 2. *Moore*

Définition 1 (Congruence de Nérode). *Soit $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ un automate déterministe complet, dont tous les sommets sont accessibles depuis l'état initial. La congruence «$\equiv$» suivante, vue en cours, s'appelle la congruence de Nérode :*

$$q \equiv q' \qquad ssi \qquad \forall u \in \Sigma^* \qquad \delta^*(q,u) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q',u) \in F$$

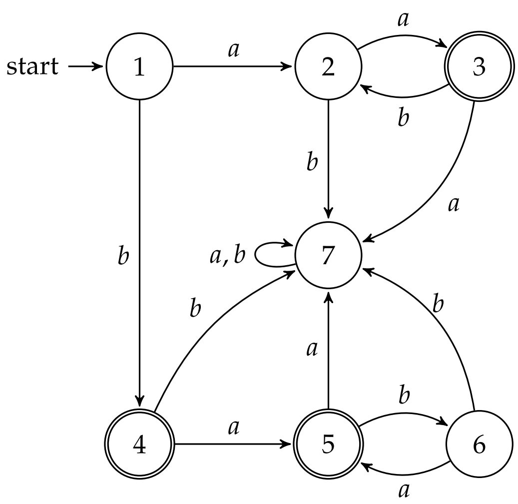
Définition 2 (Algorithme de Moore). *Soit $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ un automate déterministe complet, dont tous les sommets sont accessibles depuis l'état initial. On définit $\equiv_i$ sur Q par :*

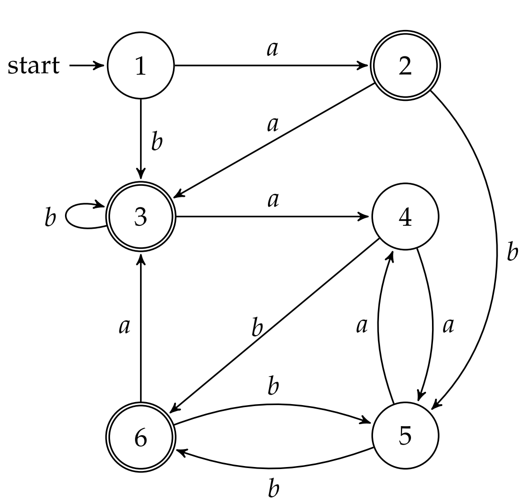
$$q \equiv_0 q' \qquad ssi \qquad q, q' \in F \vee q, q' \notin F$$

$$q \equiv_{i+1} q' \qquad ssi \qquad q \equiv_i q' \wedge \forall a \in \Sigma \quad \delta(q,a) \equiv_i \delta(q',a)$$

pour tous états q, q' de Q et pour tout $i \geq 0$.
L'alogrithme de Moore consiste à calculer la suite des $\equiv_i$ jusqu'à un indice k tel que $\equiv_k = \equiv_{k+1}$, auquel cas on renvoie $\equiv_k$.

1. Rappeler pourquoi l'algorithme de Moore termine et renvoie la congruence de Nérode. Quelle est sa complexité ?
2. Exécuter l'algorithme de Moore sur les automates suivants et donner les automates minimaux correspondants :





Exercice 3. *Explosion !*

Soit $i \in \mathbb{N}^*$ et $\Sigma = \{0,1\}$. On définit le langage L sur Σ comme l'ensemble des mots ayant un 1 en i^e position avant la fin. Par exemple si $i = 2$ alors $0010 \in L$ mais $1100 \notin L$.

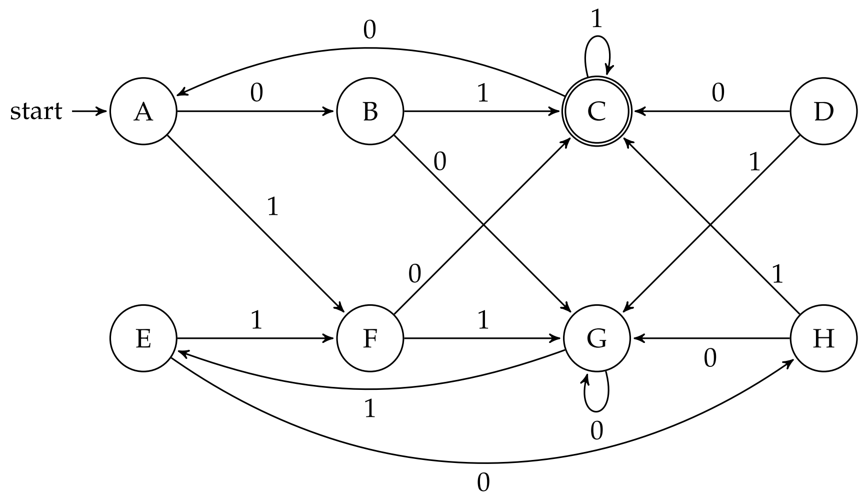
1. Donner un automate non déterministe avec exactement $i+1$ états reconnaissant L.
2. Soit w un mot de Σ avec $i-1$ lettres. Calculer le langage résiduel $w^{-1} \cdot L = \{v \in \Sigma^* \mid w \cdot v \in L\}$.
3. En déduire une borne sur le nombre d'états de n'importe quel automate déterministe reconnaissant L. La comparer avec le nombre d'états dans la question 1.

Exercice 4. *Brzozowski*

Si $\mathcal{A}$ est un automate non-déterministe, appelons

- † $M(\mathcal{A})$ l'automate mirroir de $\mathcal{A}$: les états finaux deviennent initiaux, les états initiaux finaux et les transitions changent de sens.
- † $D(\mathcal{A})$ l'automate déterministe associé à $\mathcal{A}$, restreint à ses états accessibles

1. Soit $\mathcal{A}$ l'automate suivant. Minimiser $\mathcal{A}$, puis calculer $D(M(D(M(\mathcal{A}))))$.



2. Montrer que $\mathcal{A}$, $D(M(D(M(\mathcal{A}))))$ est minimal pour tout $\mathcal{A}$.

Exercice 5. *Monoide Syntaxique*

Pour un langage arbitraire $L \subseteq \Sigma^*$, la *congruence syntaxique* $\equiv_L$ est une variante symétrique de la congruence de Nérode, définie par

$$x \equiv_L y \quad \text{ssi} \quad \forall u, v,\ uxv \in L \Leftrightarrow uyv \in L.$$

1. Vérifier que $\equiv_L$ est une relation d'équivalence, et que si $x_1 \equiv_L x_2$ et $y_1 \equiv_L y_2$, alors $x_1y_1 \equiv_L x_2y_2$.

On rappelle qu'un *monoïde* est un ensemble M muni d'une loi associative (notée comme produit) avec un neutre 1_M. Par exemple Σ^*, avec la concatenation comme produit et ε commen neutre, est un monoïde. Un *morphisme* de monoïdes est une fonction $f : M \to N$ préservant le produit et le neutre, c'est à dire $f(xy) = f(x)f(y)$ et $f(1_M) = 1_N$. Un monoide M *reconnaît* un langage $L \subset \Sigma^*$ s'il existe un morphisme $h : \Sigma^* \to M$ et une partie $A \subset M$ telle que $L = h^{-1}(A)$.

2. Donner une structure de monoïde sur $\Sigma^* / \equiv_L$, et vérifier que la projection canonique $\pi : \Sigma^* \to \Sigma^* / \equiv_L$ est un morphisme. *Remarque : $\Sigma^* / \equiv_L$ est appellé* monoïde syntaxique *de L.*
3. Montrer que $\Sigma^* / \equiv_L$ reconnaît L.
4. Soit M un monoide et $h : \Sigma^* \to M$ morphisme reconnaissant L comme $L = h^{-1}(A)$, $A \subset M$. Quitte à se restreindre à un sous-monoïde de M, on supposera h surjectif. Montrer que si $h(x) = h(y)$, alors $x \equiv_L y$. En déduire un morphisme surjectif $f : M \to \Sigma^* / \equiv_L$
5. On admet qu'un langage est rationnel si et seulement s'il est reconnu par un monoïde fini. Montrer que L est rationnel si et seulement si $\equiv_L$ est d'index fini.

En ce qui concerne les monoïdes reconnaissant des langages, revoyez l'exercice 4 du TD 2.