TD 5

Exercice 1.
Donner des grammaires algébriques engendrant les langages suivants. Pour tout mot w on note w^R son miroir. C'est-à-dire que si $w = w_1 \dots w_n$ alors $w^R = w_n \dots w_1$.

1. $\{w\,w^R \mid w \in \Sigma^*\}$ c'est-à-dire l'ensemble des palindromes de longueur paire sur $\{a, b\}$.
2. L'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ ayant le même nombre d'occurrences de a que de b.
3. L'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ ayant deux fois plus de a que de b.
4. $\Sigma^* - \{w\,w^R \mid w \in \Sigma^*\}$ avec $\Sigma = \{a, b\}$.
5. $\{w\,\#\,w' \mid w, w' \in a^* \wedge |w| \neq |w'|\}$
6. $\{w\,\#\,w' \mid w, w' \in \{a, b\}^* \wedge w \neq w'\}$

Exercice 2.
Quels sont les langages engendrés par les grammaires suivantes ?

1. $S \longrightarrow a\,S \mid a\,S\,b\,S \mid \varepsilon$
2. $S \longrightarrow S\,T \mid \varepsilon$
   $T \longrightarrow a_1\,S\,\overline{a_1} \mid \dots \mid a_n\,S\,\overline{a_n}$
3. $S \longrightarrow a\,S\,b \mid b\,Y \mid Y\,a$
   $Y \longrightarrow b\,Y \mid a\,Y \mid \varepsilon$

Exercice 3. *Presburger*
Faire tourner l'algorithme de décision des formules du premier ordre de l'arithmétique de Presburger sur les exemples suivants :

1. $\exists y \exists z [(\exists t\ z + t = y) \wedge y + y = z]$
2. $\forall x \exists y (y + y = x)$

Exercice 4. *Facteurs*
Pour un langage L, on définit l'ensemble des infixes par

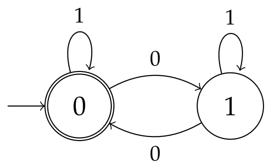
$$I(L) := \{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Sigma^* \qquad u \cdot w \cdot v \in L\}$$

1. Donner un langage algébrique mais non rationnel L dont l'ensemble des infixes est rationnel.
2. Même question avec $I(L)$ non rationnel.

Exercice 5. *Arden*

1. Soit K et K' deux langages fixés sur un même alphabet Σ. On considère l'équation de la variable $L \in 2^{\Sigma^*}$ suivante
   $$L = K \cdot L + K'$$
   Montrer qu'elle admet une unique solution dès lors que $\varepsilon \notin K$. Expliciter cette solution.

   Indication. *Raisonner par analyse synthèse.*
2. Résoudre l'équation de la variable $L \in 2^{\Sigma^*}$ suivante avec $a \in \Sigma$.
   $$L = a \cdot L$$
3. Même question avec l'équation $L = a \cdot L + \varepsilon$.
4. On considère l'automate suivant :



Soit L_i le langage des mots reconnus depuis l'état i. Écrire les équations vérifiées par L_0 et L_1. En utilisant la question 1, déduire le langage reconnu par cet automate.