TD 9

Exercice 1.
Montrer que les langages récursivement énumérables sont clos par les opérations suivantes :

1. union
2. intersection
3. concaténation
4. étoile

Exercice 2.
Le but de cet exercice est de prouver qu'un problème en apparence très simple peut être indécidable. Il s'agit du problème de correspondance de Post (en anglais «Post Correspondence Problem»).

Définition (PCP, Emil Post, 1946)**.** Soit Σ un alphabet contenant au moins deux lettres. On appelle domino tout élément de $(\Sigma^+)^2$. Le problème de correspondance de Post consiste à déterminer si, étant donné un ensemble fini de dominos D, il existe une séquence non vide $(h_1, b_1), \ldots, (h_n, b_n)$ telle que

$$h_1 \cdots h_n = b_1 \cdots b_n$$

Exemple. $$D := \left\{ \begin{bmatrix} b\,b\,a \\ b\,a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b\,a \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ a\,b \end{bmatrix} \right\}$$

Cet ensemble de domino a une solution : $\begin{bmatrix} a \\ a\,b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b\,b\,a \\ b\,a \end{bmatrix}$

1. Résoudre PCP pour les instances suivantes :
   1. $D_1 := \left\{ \begin{bmatrix} a\,a\,b \\ a\,b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b\,a\,b \\ b\,a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a\,a\,b \\ a\,b\,a\,b \end{bmatrix} \right\}$
   2. $D_2 := \left\{ \begin{bmatrix} a \\ a\,b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b\,a \\ a\,b\,a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ a\,b\,a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b\,b\,a \\ b \end{bmatrix} \right\}$
   3. $D_3 := \left\{ \begin{bmatrix} a\,b \\ b\,b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a\,a \\ b\,a\,a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a\,b \\ a\,b\,b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b\,b \\ b\,a\,b \end{bmatrix} \right\}$
2. On introduit une version modifiée du problème de correspondance de Post. Cette fois, un domino est indiqué comme devant être le premier élément de toute séquence solution. On appelle cette version PCPM. Montrer que PCP est décidable si et seulement si PCPM l'est.
3. Montrer que PCPM est indécidable en le réduisant au problème de l'arrêt.

   Indication. *On pourra demander à ce que le premier domino soit* $\begin{bmatrix} \# \\ \# q_0\, w_1 \cdots w_n \end{bmatrix}$.

Exercice 3.
On fixe un alphabet fini Σ contenant entre autre les lettres a et b. On notera le mot vide «ε». On se donne une bijection entre l'ensemble des machines de Turing sur l'alphabet Σ et Σ^*. On notera $\langle M \rangle$ l'image de la machine de Turing M par cette bijection.

✎ Les ensembles suivants sont-ils décidables ? récursivement énumérables ? de complémentaire récursivement énumérable ?

1. $\{\langle M \rangle \in \Sigma^* \mid M(\langle M \rangle) \text{ s'arrête}\}$
2. $\{\langle M \rangle \in \Sigma^* \mid M(\varepsilon) \text{ s'arrête}\}$
3. $\{\langle M \rangle \in \Sigma^* \mid M(abba) \text{ s'arrête}\}$

4. $L_\varnothing = \{\langle M\rangle \in \Sigma^* \mid L(M) = \varnothing\}$
5. $\{\langle\langle M_1\rangle, \langle M_2\rangle\rangle \in \Sigma^* \mid L(M_1) = L(M_2)\}$

Exercice 4.
Les problèmes suivants sont ils décidables ?

1. Étant donnée une grammaire algébrique G et un langage régulier R, est-ce que $L(G) = R$?
2. Étant donnée une grammaire algébrique G et un langage régulier R, est-ce que $L(G) \subseteq R$?
3. Étant donnée une grammaire algébrique G sur $\{0, 1\}$, est-ce que G génère un mot qui ne contient que des 1 ?
4. Étant donnée une grammaire algébrique G, est-ce que $L(G)$ est régulier ?