Devoir Maison 2 (à rendre le 18 mai en TD)

Une attention particulière sera apportée à la rédaction. Toutes les affirmations doivent être raisonnablement justifiées. Pour répondre à une question, on peut supposer les résultats des questions précédentes.
Vous pouvez réfléchir sur les exercices ensemble, mais la rédaction doit être individuelle.
Le barème donné est indicatif de la difficulté et longueur des questions, et il est susceptible d'être modifié.

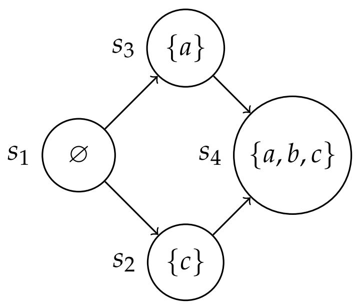
On s'intéresse à la logique intuitionniste, dans laquelle les principes de tiers exclu, preuve par contradiction, etc. ne sont pas valides.[1] On considère dans un premier temps le calcul propositionnel. La *déduction naturelle intuitionniste* NJ est le système de preuve consistant des même règles que la déduction naturelle classique, sauf que l'on remplace la règle de contradiction $\bot_c$ par la règle d'explosion :

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A} \bot_e$$

Une *structure de Kripke* sur un ensemble $\mathcal{V}$ de variables consiste en un ensemble ordonné $(\mathcal{S}, \leq_{\mathcal{S}})$ (possiblement infini) appelé squelette de la structure, et une fonction $\nu_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \times \mathcal{V} \to \{0,1\}$—autrement dit une valuation pour chaque élément de $\mathcal{S}$—qui vérifie la condition de croissance :

$$\text{Pour tous } s \leq_{\mathcal{S}} t \text{ et } x \in \mathcal{V}, \text{ on a } \nu_{\mathcal{S}}(s,x) \leq \nu_{\mathcal{S}}(t,x)$$

On représente souvent les structures de Kripke (finies) comme graphes dirigés acycliques : les sommets sont les éléments de $\mathcal{S}$, l'ordre $s \leq_{\mathcal{S}} t$ est la relation « il y a un chemin dirigé de s vers t », et on étiquette chaque $s \in \mathcal{S}$ par l'ensemble des $x \in \mathcal{V}$ tels que $\nu_{\mathcal{S}}(s,x) = 1$. Par exemple :



Pour $\mathcal{S}$ structure de Kripke sur $\mathcal{V}$, F formule sur $\mathcal{V}$, et $s \in \mathcal{S}$, on définit la sémantique intuitionniste $\mathcal{S}, s \models F$ par récurrence sur F. Les cas $\neg$ et $\to$ sont importants.

$\mathcal{S}, s \not\models \bot$		
$\mathcal{S}, s \models x$	ssi	$\nu_{\mathcal{S}}(s,x) = 1$, pour $x \in \mathcal{V}$
$\mathcal{S}, s \models \neg F$	ssi	pour tout $t \geq_{\mathcal{S}} s$, on a $\mathcal{S}, t \not\models F$
$\mathcal{S}, s \models F \wedge G$	ssi	$\mathcal{S}, s \models F$ et $\mathcal{S}, s \models G$
$\mathcal{S}, s \models F \vee G$	ssi	$\mathcal{S}, s \models F$ ou $\mathcal{S}, s \models G$
$\mathcal{S}, s \models F \to G$	ssi	pour tout $t \geq_{\mathcal{S}} s$, si $\mathcal{S}, t \models F$, alors $\mathcal{S}, t \models G$

1. *[1 pt]* Soit $\mathcal{S}$ la structure de Kripke représentée ci-dessus. Est-ce que $\mathcal{S}, s_1 \models (a \to b) \to c$?
2. *[1 pt]* Donner une structure de Kripke $\mathcal{S}$ et $s \in \mathcal{S}$ tels que $\mathcal{S}, s \not\models x \vee \neg x$, avec x variable propositionnelle. Est-ce que $\mathcal{S}, s \models \neg(x \vee \neg x)$?

[1] On refuse ces principes dans la logique que l'on étudie, mais pas dans la « méta-logique ». On interdit donc les règle correspondantes dans les arbres de preuve, mais vous avez le droit de faire des raisonnements par l'absurde.

3. *[2 pts]* Montrer que si F est une formule tautologique en sémantique intuitionniste (i.e. vérifiée en tout point de toute structure de Kripke), alors F est aussi tautologique en sémantique classique (vérifiée par toute valuation).

4. *[4 pts]* Montrer le lemme de croissance : pour toute formule F, structure de Kripke $\mathcal{S}$, et $s, t \in \mathcal{S}$ tels que $s \leq_{\mathcal{S}} t$, si $\mathcal{S}, s \models F$, alors $\mathcal{S}, t \models F$.

On dit qu'un séquent $\Gamma \vdash F$ est valide en sémantique intuitionniste si pour toute structure de Kripke $\mathcal{S}$ et $s \in \mathcal{S}$, si $\mathcal{S}, s \models \Gamma$, alors $\mathcal{S}, s \models F$ ($\mathcal{S}, s \models \Gamma$ signifiant que pour tout $A \in \Gamma$, $\mathcal{S}, s \models A$).

5. *[6 pts]* Montrer la correction de NJ : tout séquent prouvable dans NJ est valide pour la sémantique intuitionniste. On se contentera de traiter les cas des règles $\neg_i, \neg_e, \bot_e, \rightarrow_i, \rightarrow_e$, qui diffèrent de la sémantique classique.

6. *[2 pts]* Prouver $\vdash \neg\neg(F \vee \neg F)$ dans NJ, pour F une formule arbitraire.
   Remarque : si $\neg\neg\varphi$ est prouvable, on dit que φ est irréfutable.
   Que dire de la satisfaisabilité de $\neg(x \vee \neg x)$ (cf. question 2) ?

On considère maintenant des structures de Kripke pour la logique du premier ordre. Au lieu de la valuation $v_{\mathcal{S}}$, on munit une structure $\mathcal{S}$ d'une famille $\{M_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ d'interprétations du premier ordre. La condition de croissance devient : pour $s \leq_{\mathcal{S}} t$,

— $|M_s| \subseteq |M_t|$.

— les interprétations de symboles de fonctions coïncident sur $|M_s|$: pour f symbole de fonction et $x_1, \ldots, x_n \in |M_s|$, on a $f_{M_s}(x_1, \ldots, x_n) = f_{M_t}(x_1, \ldots, x_n)$,

— et les interprétations de symboles de prédicats sont croissantes : pour R symbole de fonction et $x_1, \ldots, x_n \in |M_s|$, si $(x_1, \ldots, x_n) \in R_{M_s}$, alors $(x_1, \ldots, x_n) \in R_{M_t}$.

Pour $\mathcal{S}$ structure de Kripke, $s \in \mathcal{S}$, et e environnement dans M_s, la sémantique $\mathcal{S}, s, e \models F$ est définie par récurrence sur F.

$\mathcal{S}, s, e \models R(t_1, \ldots, t_n)$	ssi	$(Val_{M_s}(t_1, e), \ldots, Val_{M_s}(t_n, e)) \in R_{M_s}$
$\mathcal{S}, s, e \models \exists x.F$	ssi	il existe $a \in M_s$ tel que $\mathcal{S}, s, e[x := a] \models F$
$\mathcal{S}, s, e \models \forall x.F$	ssi	pour tout $t \geq_{\mathcal{S}} s$ et $a \in M_t$, on a $\mathcal{S}, t, e[x := a] \models F$

Les autres cas sont similaires à la sémantique du calcul propositionnel. On remarque que si e est un environnement sur M_s et $s \leq_{\mathcal{S}} t$, alors e est aussi un environnement sur M_t par croissance, ce qui est nécessaire pour que les cas de $\neg, \rightarrow, \forall$ soient bien définis.

7. *[2 pts]* Montrer que $\neg\forall x.\neg F \rightarrow \exists x.F$ n'est pas une tautologie en sémantique intuitionniste, avec F formule de votre choix.

8. *[2 pts]* Donner une structure $\mathcal{S}$ et $s \in \mathcal{S}$ tels que $\mathcal{S}, s \models \neg\forall x.(R(x) \vee \neg R(x))$, avec R prédicat unaire.
   Indication : $\mathcal{S}$ doit nécessairement être infinie.

9. *[2 pts]* Bonus : prouver l'indication de la question précédente, i.e. pour toute structure de Kripke finie $\mathcal{S}$ et $s \in \mathcal{S}$, on a $\mathcal{S}, s \not\models \neg\forall x.(R(x) \vee \neg R(x))$.

En logique intuitionniste, le tiers exclu sous la forme $F \vee \neg F$ n'est donc pas valide, mais reste irréfutable. En revanche, le tiers exclu sous quantificateur $\forall x.(F(x) \vee \neg F(x))$ n'est même pas irréfutable, car sa négation est satisfaisable.