TD11

Exercice 1. *Cantor-Bernstein*

On se propose d'établir le théorème de Cantor-Bernstein :

Théorème (Cantor-Bernstein)**.** *Soient E et F deux ensembles. Si E s'injecte dans F et F s'injecte dans E, alors E et F sont équipotents.*

1. Soit une application $f : [\,0\,;1\,] \to [\,0\,;1\,]$ croissante. Montrer que f a un point fixe.
2. Soit une application $f : 2^E \to 2^E$ croissante pour l'inclusion. En s'inspirant de la question précédente, montrer que f a un point fixe.
3. Soient E et F deux ensembles et soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications injectives. Montrer l'existence de $A \in 2^E$ telle que $g(F - f(A)) = E - A$

   Indication. *Montrer que* $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} 2^E & \to & 2^E \\ X & \mapsto & E - g(F - f(X)) \end{array} \right.$ *a un point fixe.*

4. Conclure.

Exercice 2. *Propriétés Simples*

Soient α et β des ordinaux. Montrer les propriétés suivantes :

1. $\varnothing$ est un ordinal.
2. Si $\alpha \neq \varnothing$, alors $\varnothing \in \alpha$.
3. $\alpha \notin \alpha$.
4. Si $x \in \alpha$, alors $x = S_x = \{y \in \alpha \mid y < x\}$.
5. Si $x \in \alpha$, alors x est un ordinal.
6. $\beta \subseteq \alpha$ ssi $\beta = \alpha$ ou $\beta \in \alpha$.
7. $\alpha_1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ est un ordinal (noté $\alpha + 1$).

Exercice 3. *Supremum d'ordinaux*

Démontrer les propriétés suivantes :

1. Soient α et β des ordinaux. Montrer que
$$\alpha \leq \beta \leq \alpha + 1 \Leftrightarrow (\beta = \alpha \vee \beta = \alpha + 1)$$
2. Soit X un ensemble non vide d'ordinaux. Montrer que $\bigcap_{\alpha \in X} \alpha$ est le plus petit élément de X.
3. Soient α et β des ordinaux. Montrer qu'une et une seule des propriétés suivantes est satisfaite :
   - i) $\alpha = \beta$
   - ii) $\alpha \in \beta$
   - iii) $\beta \in \alpha$
4. Soit X est un ensemble d'ordinaux.
   - **a.** Montrer que $b = \bigcup_{\alpha \in X} \alpha$ est un ordinal.
   - **b.** Montrer de plus que si $\gamma < b$, alors il existe $\alpha \in X$ tel que $\gamma \in \alpha$.

Remarque. On écrit aussi $b = \sup_{\alpha \in X} \alpha$.

Exercice 4. *Arithmétique*

On définit l'addition sur les ordinaux de la manière suivante :

— $\alpha + 0 = \alpha$

— $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$

— Si λ est un ordinal limite, $\alpha + \lambda = \bigcup_{\gamma \in \lambda} (\alpha + \gamma)$

1. Prouver que $\alpha + \beta$ est isomorphe comme ordre à $\alpha \uplus \beta$, ordonné en plaçant les éléments de α avant ceux de β.

2. En déduire les propriétés suivantes :

— L'addition d'ordinaux est associative, de neutre 0, mais pas commutative.

— Pour tous α, β, γ avec $\beta < \gamma$, on a $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$, et $\beta + \alpha \leq \gamma + \alpha$. Il y a des cas où la seconde inégalité n'est pas stricte.

On définit la multiplication sur les ordinaux de la manière suivante :

— $\alpha \cdot 0 = 0$

— $\alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha$

— Si λ est un ordinal limite, $\alpha \cdot \lambda = \bigcup_{\gamma \in \lambda} (\alpha \cdot \gamma)$

3. Prouver que $\alpha \cdot \beta$ est isomorphe comme ordre à $\alpha \times \beta$, ordonné lexicographiquement par

$$(a, b) < (a', b') \iff b < b' \vee (b = b' \wedge a < a')$$

4. En déduire les propriétés suivantes :

— La multiplication d'ordinaux est associative, de neutre 1, mais pas commutative. Elle distribut à gauche sur $+$, i.e. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

— Il n'y a pas de diviseur de zéro. Précisément, $\alpha\beta = 0$ ssi $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$.

— Pour tous α, β, γ avec $\alpha > 0$, $\beta < \gamma$, on a $\alpha\beta < \alpha\gamma$.

5. Montrer que pour tout $\alpha \neq 0, \beta$, il existe un unique couple (γ, δ) tel que $\beta = \alpha\gamma + \delta$ et $\delta < \alpha$.

6. Trouver α, β tels que $\beta \neq \gamma\alpha + \delta$ pour tout γ, δ.

À faire chez soi : Questions de cours

— Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sont équipotents.

— On définit un ordinal limite comme un ordinal qui n'est pas successeur.

— Montrer qu'un ordinal est limite s'il est l'union des ordinaux strictement inférieurs.

— Montrer le théorème d'induction transfinie.

— Par définition, un ordinal est fini s'il est vide ou qu'il est un ordinal successeur et que tous ses éléments sont également des ordinaux successeurs. Soit ω l'ensemble des entiers. Montrer que ω est l'ensemble des ordinaux finis et que c'est le plus petit ordinal limite.

— Montrer que si f est une fonction strictement croissante entre deux ordinaux α et α' alors

- $\forall \beta \in \alpha, f(\beta) \geq \beta$
- $\alpha' \geq \alpha$
- si f est un isomorphisme alors $\alpha = \alpha'$ et f est l'identité