TD7

Exercice 1. *C'est pas standard*

Soit $\mathcal{M}$ un modèle non standard de PA. On définit sur $|\mathcal{M}|$ la relation $\sim$ suivante : $a \sim b$ si et seulement s'il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tels que [1] $\mathcal{M}, [x := a, y := b] \vDash x + \underline{n} = y + \underline{m}$.

Remarque. Autrement dit, deux éléments du modèle $\mathcal{M}$ sont en relation si et seulement s'ils diffèrent d'un entier standard [2].

1. Montrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. Soient $a, a', b, b' \in |\mathcal{M}|$ tels que $a \sim a'$ et $b \sim b'$. Montrer que $(a +_{\mathcal{M}} b) \sim (a' +_{\mathcal{M}} b')$.
3. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des classes d'équivalence de $|\mathcal{M}|$ pour $\sim$. On définit sur $\mathcal{E}$ la relation $\preceq$ par : Si A et B sont dans $\mathcal{E}$, alors $A \preceq B$ si et seulement s'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $\mathcal{M}, [x := a, y := b] \vDash x \leq y$.
   Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre total.
4. Montrer que $\mathcal{E}$, muni de l'ordre $\preceq$, a un plus petit élément mais pas de plus grand élément.

   Indication. *On pourra commencer par établir que* PA $\vdash \forall x\, (x \neq 0 \to x + x \neq x)$.
5. Montrer alors que $\preceq$ est un ordre dense sur $\mathcal{E}$.

   Indication. *On pourra commencer par établir que* PA $\vdash \forall x\, \exists y \quad x = y + y \vee S\, x = y + y$
6. Montrer que l'ensemble des éléments non standards de $\mathcal{M}$ muni de l'ordre $\leq_{\mathcal{M}}$ est isomorphe à $X \times \mathbb{Z}$ muni de l'ordre lexicographique, pour un certain ensemble totalement ordonné X.

Exercice 2. *Schema μ borné*

Soit A un sous-ensemble récursif primitif de $\mathbb{N}^{p+1}$. On définit la fonction $\mu_A : \mathbb{N}^{p+1} \to \mathbb{N}$ comme suit : $\mu_A(y, x_1, \ldots, x_p) = 0$ s'il n'existe pas d'entier $t \leq y$ tel que $(t, x_1, \ldots, x_p) \in A$; sinon, $\mu_A(y, x_1, \ldots, x_p)$ est égal au plus petit $t : 1 \leq t \leq y$ tel que $(t, x_1, \ldots, x_p) \in A$.

1. Démontrer que μ_A est récursive primitive.
2. Démontrer que les fonctions et ensembles suivants sont récursifs primitifs :
   - **a.** $q(x, y)$ est égal à la partie entier de x/y si y n'est pas nul et à 0 si y est nul,
   - **b.** l'ensemble $\{p; p$ est un nombre premier$\}$,
   - **c.** la fonction π qui a l'entier n le fait correspondre le $(n + 1)$-ème nombre premier.
   - **d.** la fonction $\delta(i, x) = z$, où $z \in \mathbb{N}$ est le plus grand entier tel que $\pi(i)^z$ divise x.

Exercice 3. *Tous ensembles*

On définit un ensemble d'entiers $E \subseteq \mathbb{N}$ par une formule $F_E(x)$ avec une unique variable libre x, de sorte que $F_E(x)$ signifie intuitivement que x est un élement de E. Formellement, on dit que $F_E(x)$ *définit* E si

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathbb{N}, x := n \vDash F_E(x)\}$$

On dira également qu'un ensemble E est *définissable* s'il existe une formule qui le définit.

1. On rappelle que pour $n \in \mathbb{N}$, la notation $\underline{n}$ désigne $S^n\, 0 = S \cdots S\, 0$ avec n instances du symbole «S».
2. On fait un abus de langage ici car on confond $\mathbb{N}$ et le segment initial qui lui est isomorphe dans $|\mathcal{M}|$.

1. Montrer que l'ensemble des entiers naturels pairs est définissable.
2. Montrer que l'ensemble des nombres premiers est définissable.
3. Soient E et E' des ensembles, $F_E(x)$ et $F_{E'}(x)$ des formules les représentant. Enoncer les propriétés suivantes :
   - E est inclus dans E'.
   - x est le plus petit élément de E.
   - E est infini.
4. Soit $F_E(x)$ une formule définissant E. Ecrire un énoncé $P_E(y)$ qui exprime la propriété suivante : «Si E contient un élément inférieur ou égal à y, alors E a un plus petit élement et celui-ci est majoré par y».
5. Le but de cette question est de prouver que $\mathrm{PA} \vdash \forall y \quad P_E(y)$.
   a. Montrer que[3] $\mathrm{P}_0 \vdash 0 \leq 0$.
   b. Montrer que $\mathrm{P}_0, \exists y \quad x + y = 0 \vdash x = 0$.
   c. Montrer que $\mathrm{PA} \vdash \forall x \, \forall y \quad x + y = y + x$.
   d. Conclure.
6. Enoncer et démontrer dans PA la propriété «Si E est non vide, alors il a un plus petit élément».
7. On appelle PA' la théorie possédant les axiomes de P_0, un ensemble d'axiomes exprimant que tout ensemble définissable non vide a un plus petit élément. Montrer que PA' implique le schéma d'induction.

À faire chez soi : Questions de cours

- Etant données des formules $F_1 \dots F_p$ et G qui représentent des fonctions totales $f_1(x_1, \dots, x_n) \dots f_p(x_1, \dots, x_n)$ et $g(x_1, \dots, x_p)$, donner une formule qui représente la fonction composée $g(f_1, \dots f_p)$

Définition (Peano). On définit la théorie P_0 par l'ensemble des axiomes suivants :

- $(\mathrm{A}_1) \quad \forall x \quad \neg S\, x = 0$
- $(\mathrm{A}_2) \quad \forall x \, \exists y \quad (\neg x = 0 \to S\, y = x)$
- $(\mathrm{A}_3) \quad \forall x \, \forall y \quad (S\, x = S\, y \to x = y)$
- $(\mathrm{A}_4) \quad \forall x \quad x + 0 = x$
- $(\mathrm{A}_5) \quad \forall x \, \forall y \quad x + S\, y = S(x + y)$
- $(\mathrm{A}_6) \quad \forall x \quad x \times 0 = 0$
- $(\mathrm{A}_7) \quad \forall x \, \forall y \quad x \times S\, y = (x \times y) + x$

La théorie PA s'obtient en ajoutant à P_0 tous les axiomes que l'on peut obtenir à partir du schéma d'axiomes suivant :

$$(\mathrm{SI}(\mathrm{F}, \mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_\mathrm{n})) \qquad \forall x_1, \dots, x_n \, ((F(0, x_1, \dots, x_n) \wedge \forall x \; (F(x, x_1, \dots, x_n) \to F(S\, x, x_1, \dots, x_n))) \to \forall x \, F(x, x_1, \dots, x_n))$$

3. On rappelle que $x \leq y$ est un raccourci pour $\exists z \quad x + z = y$.