TD8

Exercice 1. *Schema μ borné*

Soit A un sous-ensemble récursif primitif de $\mathbb{N}^{p+1}$. On définit la fonction $\mu_A : \mathbb{N}^{p+1} \to \mathbb{N}$ comme suit : $\mu_A(y, x_1, \ldots, x_p) = 0$ s'il n'existe pas d'entier $t \leq y$ tel que $(t, x_1, \ldots, x_p) \in A$; sinon, $\mu_A(y, x_1, \ldots, x_p)$ est égal au plus petit $t : 1 \leq t \leq y$ tel que $(t, x_1, \ldots, x_p) \in A$.

1. Démontrer que μ_A est récursive primitive.
2. Démontrer que les fonctions et ensembles suivants sont récursifs primitifs :
   - **a.** $q(x, y)$ est égal à la partie entier de x/y si y n'est pas nul et à 0 si y est nul,
   - **b.** l'ensemble $\{p; p \text{ est un nombre premier}\}$,
   - **c.** la fonction π qui a l'entier n le fait correspondre le $(n+1)$-ème nombre premier.
   - **d.** la fonction $\delta(i, x) = z$, où $z \in \mathbb{N}$ est le plus grand entier tel que $\pi(i)^z$ divise x.

Exercice 2.

Vérifier que les ensembles suivants sont récursifs primitifs :

1. $\Theta_1 = \{(\#t, n) \mid x_n \text{ a au moins une occurrence dans le terme } t\}$
2. $\Phi_0 = \{(\#F, n) \mid x_n \text{ n'a pas d'occurrence dans la formule } F\}$
3. $\Phi_1 = \{(\#F, n) \mid x_n \text{ n'a pas d'occurrence libre dans la formule } F\}$
4. $\Phi_2 = \{(\#F, n) \mid x_n \text{ a au moins une occurrence libre dans la formule } F\}$
5. $\Phi_3 = \{(\#F, n) \mid x_n \text{ a au moins une occurrence liée dans la formule } F\}$
6. $\Phi_4 = \{\#F \mid F \text{ est une formule close}\}$.

Exercice 3. *Tous ensembles*

On définit un ensemble d'entiers $E \subseteq \mathbb{N}$ par une formule $F_E(x)$ avec une unique variable libre x, de sorte que $F_E(x)$ signifie intuitivement que x est un élement de E. Formellement, on dit que $F_E(x)$ *définit* E si

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathbb{N}, x := n \models F_E(x)\}$$

On dira également qu'un ensemble E est *définissable* s'il existe une formule qui le définit.

1. Montrer que l'ensemble des entiers naturels pairs est définissable.
2. Montrer que l'ensemble des nombres premiers est définissable.
3. Soient E et E' des ensembles, $F_E(x)$ et $F_{E'}(x)$ des formules les représentant. Enoncer les propriétés suivantes :
   - E est inclus dans E'.
   - x est le plus petit élément de E.
   - E est infini.
4. Soit $F_E(x)$ une formule définissant E. Ecrire un énoncé $P_E(y)$ qui exprime la propriété suivante : «Si E contient un élément inférieur ou égal à y, alors E a un plus petit élement et celui-ci est majoré par y».
5. Le but de cette question est de prouver que $\mathrm{PA} \vdash \forall y \quad P_E(y)$.

a. Montrer que [1] $P_0 \vdash 0 \leq 0$.

b. Montrer que $P_0, \exists y \quad x + y = 0 \vdash x = 0$.

c. Montrer que PA $\vdash \forall x \, \forall y \quad x + y = y + x$.

d. Conclure.

6. Enoncer et démontrer dans PA la propriété «Si E est non vide, alors il a un plus petit élément».

7. On appelle PA$'$ la théorie possédant les axiomes de P_0, un ensemble d'axiomes exprimant que tout ensemble définissable non vide a un plus petit élément. Montrer que PA' implique le schéma d'induction.

À faire chez soi : Questions de cours

— Soit $\alpha_2(n, m) = (n + m)(n + m + 1)/2 + n$
$\alpha_3(x, y, z) = \alpha_2(x, \alpha_2(y, z))$
$\#0 = \alpha_3(0, 0, 0)$
$\#x_n = \alpha_3(n + 1, 0, 0)$
$\#S(t_1) = \alpha_3(\#t_1, 0, 1)$
$\#(t_1 + t_2) = \alpha_3(\#t_1, \#t_2, 2)$
$\#(t_1 \times t_2) = \alpha_3(\#t_1, \#t_2, 3)$
Montrer que l'ensemble des numéros de termes est un ensemble primitif récursif.
Montrer que l'ensemble des couples $(\#t, n)$ où t est un terme et x_n n'a pas d'occurrence dans t est récursif primitif.

Définition (Peano)**.** On définit la théorie P_0 par l'ensemble des axiomes suivants :

— (A_1) $\quad \forall x \quad \neg S\, x = 0$
— (A_2) $\quad \forall x \, \exists y \quad (\neg x = 0 \to S\, y = x)$
— (A_3) $\quad \forall x \, \forall y \quad (S\, x = S\, y \to x = y)$
— (A_4) $\quad \forall x \quad x + 0 = x$
— (A_5) $\quad \forall x \, \forall y \quad x + S\, y = S(x + y)$
— (A_6) $\quad \forall x \quad x \times 0 = 0$
— (A_7) $\quad \forall x \, \forall y \quad x \times S\, y = (x \times y) + x$

La théorie PA s'obtient en ajoutant à P_0 tous les axiomes que l'on peut obtenir à partir du schéma d'axiomes suivant :

$$(\mathrm{SI}(\mathrm{F}, x_1, \cdots, x_n)) \qquad \forall x_1, \ldots, x_n \, ((F(0, x_1, \ldots, x_n) \wedge \forall x \; (F(x, x_1, \ldots, x_n) \to F(S\, x, x_1, \ldots, x_n))) \to \forall x \, F(x, x_1, \ldots, x_n))$$

1. On rappelle que $x \leq y$ est un raccourci pour $\exists z \quad x + z = y$.