TD9

Exercice 1. *Caracteriser* $\mathbb{N}$

✎ Montrer qu'il n'existe pas de théorie axiome-récursive sur le langage de l'arithétique de Peano dont le seul modèle dénombrable soit $\mathbb{N}$ à isomorphisme près.

Exercice 2. *Théorème de Tarski*

✎ Démontrer que l'ensemble des codes des formules closes dans le langage de l'arithmétique qui sont vraies dans $\mathbb{N}$ n'est pas définissable : il n'existe aucune formule $\varphi(x)$ satisfaite exactement par les entiers n tels que $n = \#F$, où F est une formule close vraie dans $\mathbb{N}$.

Exercice 3. *ProblemeDeCoherence*

1. Créer une théorie cohérente qui prouve son incohérence. Plus précisément, trouver une théorie T qui admet un modèle et telle que $T \vdash \neg\mathrm{Coh}(T)$.
2. En quel sens $\mathrm{Coh}(T)$ exprime-t-elle la cohérence de T ? Pourquoi cela n'est il pas un paradoxe ?

Exercice 4.
On fixe le langage égalitaire $\mathcal{L} = \{R, =\}$ où R est un prédicat binaire.

1. Existe-t-il sur $\mathcal{L}$ une théorie des relations d'équivalence n'ayant qu'un nombre fini de classes ? C'est-à-dire une théorie dont les modèles sont exactement les ensembles munis d'une relation d'équivalence qui n'a qu'un nombre fini de classes.
2. Existe-t-il sur $\mathcal{L}$ une théorie des relations d'équivalence n'ayant que des classes finies ?
3. Donner une axiomatisation de la théorie $T_\equiv$ des relations d'équivalence ayant une infinité de classes qui sont toutes infinies.
4. Une théorie T est dite *finiment axiomatisable* s'il existe une théorie finie T_1 telle que $T \vdash T_1$ et $T_1 \vdash T$. Autrement dit, T permet de prouver tous les axiomes de T_1 et T_1 permet de prouver tous les axiomes de T.
   - **a.** Montrer que si T est finiment axiomatisable, alors il existe un sous-ensemble fini T' de T tel que $T' \vdash T$.
   - **b.** La théorie $T_\equiv$ est-elle finiment axiomatisable ?
   - **c.** La réponse à la question précédente dépend-elle du choix des axiomes de $T_\equiv$?
5. Montrer que $T_\equiv$ a deux modèles non isomorphes.
6. **(Bonus)** La théorie $T_\equiv$ est elle complète ?

À faire chez soi : Questions de cours

— Prouver que toute théorie cohérente qui contient P_0 (arithmétique élémentaire) est indécidable.

— Montrer le théorème de Church : pour tout langage $\mathcal{L}$ contenant au moins deux constantes, un symbole de fonction unaire et deux symboles de fonctions binaires, l'ensemble des théorèmes logiques sur $\mathcal{L}$ n'est pas récursif. *On peut admettre le théorème précédent. Un théorème logique est une formule prouvable dans le contexte vide.*

— Énoncer et montrer le premier théorème d'incomplétude de Gödel. En déduire que PA (arithmétique de Peano) n'est pas complète.